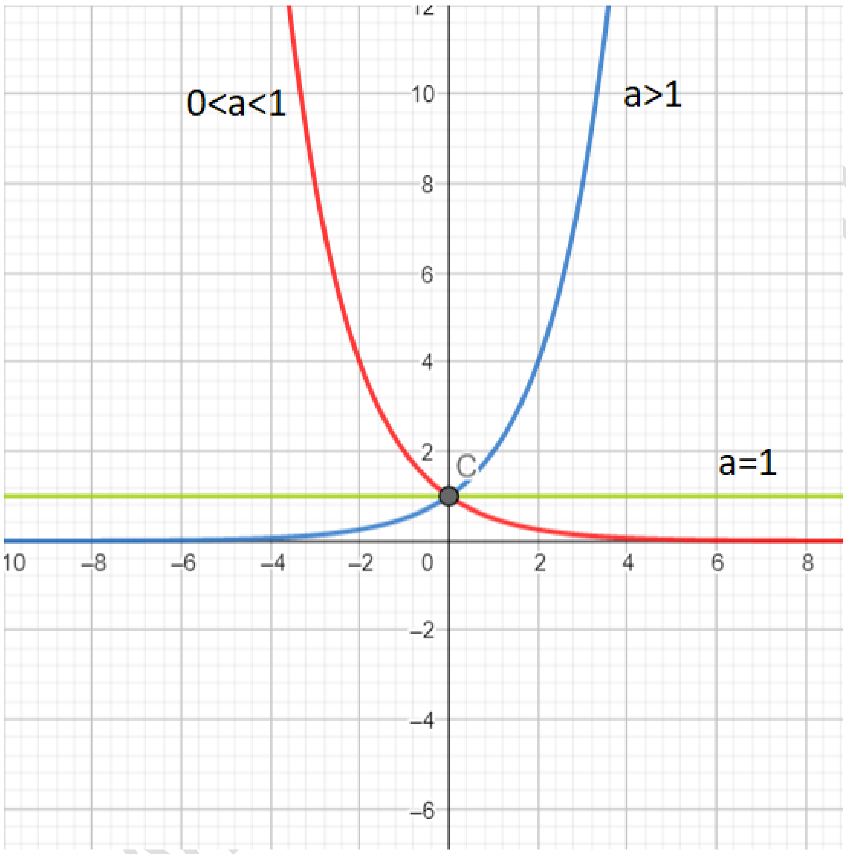
FUNZIONE ESPONENZIALE

La funzione esponenziale è una funzione del tipo $y = a^x$, $a \in \mathbb{R}$, con dominio in R e codominio in R^+.
In base al valore di *a* il grafico della funzione (che prende il nome di *curva esponenziale*) assume differenti andamenti, vediamoli qui sotto.



Attenzione!!! Come notiamo dal grafico tutte le curve passano per il punto C (0,1), unica intersezione con gli assi della funzione esponenziale. Ricordiamocelo nello studio delle funzioni!

Per ognuno di questi casi possiamo definirne le proprietà

a > 1	0<a<1	a=1
Dominio R Codominio R^+ Funzione crescente in R Funzione biiettiva $a^x \to 0 \; per \; x \to -\infty$ $a^x \to +\infty \; per \; x \to +\infty$	Dominio R Codominio R^+ Funzione decrescente in R Funzione biiettiva $a^x \to 0 \; per \; x \to +\infty$ $a^x \to +\infty \; per \; x \to -\infty$	Dominio R Codominio R^+ Funzione costante Funzione non iniettiva

EQUAZIONI ESPONENZIALI

Una equazione esponenziale è l'equazione che al suo interno contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente, ad esempio $a^x=b\,,\ a>0$.

- Equazione impossibile: si ha quando dobbiamo risolvere equazioni tipo $1^x=2\ ,\forall x\in\mathbb{R}$ che non ha ovviamente soluzioni poiché $1^x=1$; oppure quando l'equazione da risolvere è del tipo $2^x=-4$ che non ha soluzioni per alcun valore reale di x
- Equazione indeterminata: è il caso di $1^x=1$ che ammette infinite soluzioni, per qualunque valore reale di x
- Equazione determinata: ogni equazione $a^x=b\,,\ a\in\mathbb{R}\,,b\in\mathbb{R}\,,a\neq 1$ ammette sempre **una ed una sola** soluzione.

Esempio

Risolviamo l'equazione $64^x=128$
Come prima cosa esprimiamo entrambi i termini come potenze di 2 ottenendo $2^{6x}=2^7$; ora applicando le proprietà delle potenze aventi stessa base, risolviamo l'esercizio andando a determinare il valore di *x*, $6x=7\Rightarrow x=7/6$.

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Si tratta di disequazioni che al loro interno contengono almeno una potenza con l'incognita all'esponente.
Il metodo risolutivo è identico e quello già visto per le equazioni esponenziali, con una accortezza da seguire:

$a>1 \qquad m>n\Rightarrow a^m>a^n$
$0<a<1 \qquad m>n\Rightarrow a^m<a^n$

Esempio

Risolviamo l'equazione $(\frac{1}{8})^x>\frac{1}{4}$

Esprimiamo entrambi i termini come potenze delle stessa base, ottenendo $(\frac{1}{2})^{3x}>(\frac{1}{2})^2$, notiamo inoltre che la base è minore di 1, infatti $\frac{1}{8}=0{,}125$. Pertanto applicando la seconda regola vista qui sopra dobbiamo scrivere $3x<2\Rightarrow x<\frac{2}{3}$

FUNZIONE LOGARITMO

Nel paragrafo precedente abbiamo dato la definizione di *funzione esponenziale* $a^x = b\ ,\ a>0\ \ b>0\ \ a\neq 1$, diremo quindi che il valore di x soluzione dell'equazione prende il nome di <u>logaritmo in base a di</u> b e lo scriviamo in questo modo $\log_a b = x$.
Esiste quindi un forte legame tra esponenziale e logaritmo, infatti

$$\boxed{x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b}$$

a prende il nome di *base* del logaritmo
b prende il nome di *argomento* del logaritmo

Da quanto abbiamo visto possiamo scrivere ad esempio $3^2 = 9$ ma anche $2 = \log_3 9$, <u>che hanno lo stesso significato!</u>

Alcune regole *gratis*

$\log_a 1 = 0$ perché $a^0 = 1$

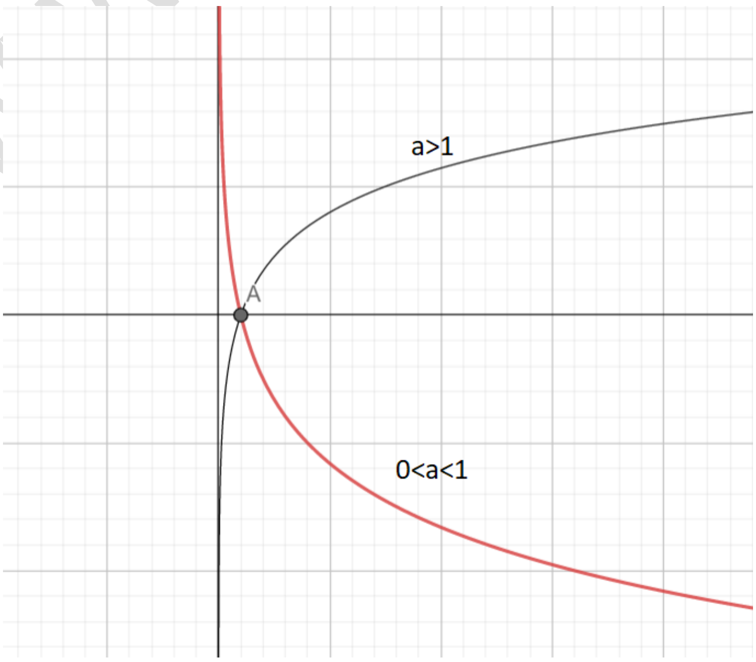
$\log_a a = 1$ perché $a^1 = a$

Il logaritmo gode di alcune proprietà, soprattutto per quello che riguarda le operazioni:

$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

$\log_a (\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$

Fatte queste premesse definiamo la *funzione logaritmica* ogni funzione del tipo $y = \log_a x\ ,\ a>0\ ,\ a\neq 1$



Così come per l'esponenziale, anche il grafico del logaritmo ha un differente andamento in funzione del valore della base *a* e l'unico punto di intersezione con gli assi è A (1,0), non esistono infatti intersezioni con l'asse y, ma solo andamenti **asintotici**.

a > 1	0<a<1
Dominio R^+ Codominio R Funzione crescente in R^+ Funzione biiettiva $\log_a x \rightarrow -\infty \text{ per } x \rightarrow 0$ $\log_a x \rightarrow +\infty \text{ per } x \rightarrow +\infty$	Dominio R^+ Codominio R Funzione decrescente in R^+ Funzione biiettiva $\log_a x \rightarrow +\infty \text{ per } x \rightarrow 0$ $\log_a x \rightarrow -\infty \text{ per } x \rightarrow +\infty$

EQUAZIONI LOGARITMICHE

Un'equazione si dice logaritmica quando l'incognita compare nell'argomento di almeno un logaritmo e sarà scritta nella forma

$$\log_a A(x) = \log_a B(x)$$

dove A(x) e B(x) rappresentano funzioni della nostra incognita *x*.

Per risolvere le equazioni logaritmiche dobbiamo anche ricordare le **condizioni di esistenza** dei logaritmi, imponendo tutti gli argomenti maggiori di 0 questo perché il logaritmo è definito solamente in R^+.

Esempio

$$\log x + \log(x+4) = \log 7 + \log(3x)$$

Determiniamo le condizioni di esistenza imponendo tutti gli argomenti maggiori di 0

$$\begin{cases} x>0 \\ x+4>0 \\ 3x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>-4 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow C.E.: x>0$$

Applicando poi la proprietà del prodotto fra logaritmi scriviamo

$$\log x(x+4) = \log 21x \quad \Rightarrow \quad x^2+4x-21x=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-17x=0 \quad \Rightarrow \quad x(x-17)=0$$

da qui otteniamo due soluzioni $x=0$, $x=17$ che soddisfano entrambe la condizione di esistenza e pertanto sono soluzioni dell'equazione logaritmica.

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Una disequazione logaritmica possiamo scriverla nella forma

$$\log_a A(x) < \log_a B(x)$$

Come per le disequazioni esponenziali anche per le logaritmiche dobbiamo fare due considerazioni:

$a>1 \qquad \log_a b < \log_a c \Rightarrow b < c$

$0<a<1 \qquad \log_a b < \log_a c \Rightarrow b > c$

$b\,,c>0$

Esempio

Risolviamo la disequazione $\log_4(x-5)<2$

Come prima cosa dobbiamo esprimere il termine a destra del segno di disuguaglianza come un logaritmo.
Ricordando che $\log_4 4=1$ possiamo riscrivere la disequazione come

$$\log_4(x-5) < 2\log_4 4 \quad \Rightarrow \quad \log_4(x-5) < \log_4 4^2 \quad \Rightarrow \quad (x-5) < 16 \quad \Rightarrow \quad x < 21$$

Scriviamo le condizioni di esistenza:

$$\begin{cases} x-5>0 \\ x<21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>5 \\ x<21 \end{cases} \Rightarrow 5<x<21$$